Leçon 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Développements :

Théorème de Bernstein pour les séries entières, Théorèmes abélien et taubérien faible.

Bibliographie :

Gourdon, El Amrani, Hauchecorne, Bernis, OA, ZQ.

Rapport du jury 2018 :

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est $\mathbb{R}$ est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes ($\exp, \log, 1/(1-z), \sin$,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence vis à vis des différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé. Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière.

Rapport du jury 2017 :

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est $\mathbb{R}$ est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes $(\exp, \log, 1/(1-z), \sin, ...)$. Le jury attend également que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui con1erne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière.

1 Convergence des séries entières

1.1 Séries entières et rayon de convergence

Définition 1 (Gourdon p236). *Série entière.*

Remarque 2. *La théorie a un sens dans une algèbre de Banach générale, et les résultats présentés ici portent leur fruits dans ce cas général car la convergence absolue implique la convergence.*

Proposition 3 (Gourdon p236). *Lemme d'Abel.*

Définition 4 (Gourdon p237). *Rayon de convergence.*

Proposition 5 (Gourdon p237). *Caractérisation de la nature de la série en fonction du rayon.*

Définition 6 (Gourdon p237). *Disque de convergence.*

Exemple 7. *Série des z^n a pour rayon de convergence* 1.

Proposition 8 (El Amrani p238). *Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence.*

Contre exemple 9. $\sum z^n$, $\sum z^n/n$.

1.2 Calcul pratique du rayon de convergence

Proposition 10 (Gourdon p237)**.** *Règle de d'Alembert.*

Exemple 11 (Gourdon p237)**.** *Série des* $z^n/n!$*.*
Série $n!z^n$*.*

Proposition 12 (Gourdon p237)**.** *Règle de Cauchy.*

Exemple 13. *Série des* $2^n z^n$*.*

Proposition 14 (Gourdon p237)**.** *[Nourdin p214] Règle d'Hadamard.* $1/R = limsup(|a_n|^{1/n}$*.*

Exemple 15. *Série des* z^{2n}*.*

Définition 16. exp *complexe.*

1.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 17. *La somme, la multiplication par un scalaire, et le produit de Cauchy de séries entières sont des séries entières.*

Proposition 18 (El Amrani p234)**.** *Comparaison des séries entières.*
Si $a_n \simeq b_n$ *alors* $R_a = R_b$*.*
Si $a_n = O(b_n)$ *alors* $R_b \leq R_a$*.*

Exemple 19 (El Amrani p234)**.** $e^{\cos(n)}$*.*

Proposition 20 (Gourdon p237)**.** *Rayon de la somme.*

Définition 21. sin*,* cos*.*

Contre exemple 22 (Gourdon p238)**.** *Séries* z^n *et* $-z^n$ *ont un rayon de convergence égal à* 1*, celui de leur somme est infini.*

Proposition 23 (Gourdon p237)**.** *Rayon du produit de Cauchy.*

Contre exemple 24 (Hauchecorne p262)**.** $f(z) = 1 - z$ *et* $g(z) = 1/(1 - z)$*.*

Définition 25 (El Amrani p237)**.** *Série entière dérivée, primitive.*

1.4 Comportement au bord du disque de convergence

Remarque 26 (Gourdon p237)**.** *La série entière peut converger ou non sur son disque ouvert de convergence.*

Exemple 27 (Hauchecorne p261)**.** *La série des* z^n *diverge sur le cercle de convergence.*
La série des $(1/n^2)z^n$ *converge sur tout le cercle de convergence.*
La série des $(1/n)z^n$ *converge en certains points et diverge en d'autres points du cercle de convergence.*

Théorème 28 (Gourdon p252)**.** *[Bernis] Théorèmes d'Abel.*

Théorème 29 (Gourdon p253)**.** *[Bernis] Théorème taubérien faible.*

2 Régularité de la somme d'une série entière

2.1 Continuité

Proposition 30 (Gourdon p238)**.** *Continuité sur le disque ouvert de convergence.*

Remarque 31 (OA p48)**.** *Uniforme continuité sur les compacts du disque de convergence.*

Exemple 32 (Gourdon p243)**.** *[El Amrani p239]* exp, cos, sin.

2.2 Dérivation dans le cas réel et lien avec le développement de Taylor

Remarque 33. *Comme la série dérivée est normalement convergente sur* $]-R, R[$*, le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique.*

Proposition 34 (Gourdon p238)**.** *Dérivabilité.*

Proposition 35. *Expression des coefficients. Donc unicité du DSE.*

Exemple 36. *On a donc* $exp'(x) = exp(x)$ *sur* $\mathbb{R}$*, et* $cos' = -sin$*,* $sin' = cos$ *sur* $\mathbb{R}$*, et ces fonctions sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 37. *Pour* $\sum x^n n = 1/(1-x)$ *, on trouve alors* $1/(1-x)^2 = \sum(n+1)x^n$ *sur* $]-1, 1[$.

Proposition 38 (Gourdon p240)**.** *Une fonction* C^∞ *est développable en série entière au point* x *si et seulement si le reste intégral tend vers* 0 *sur un voisinage de ce point.*

Exemple 39. $(1 + x)^\alpha$*.*

Contre exemple 40 (Gourdon)**.** *L'exemple de l'exponentielle.*

Proposition 41. *Intégration.*

Théorème 42 (Gourdon)**.** *[Bernis] Théorème de Bernstein.*

Proposition 43 (El Amrani)**.** *Si* f *est* C^∞ *sut* $]-a, a[$ *et s'il existe* ρ, M *tels que* $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$ *alors* f *est DSZ en* 0 *sur* $]-R, R[$ *où* $R = min(a, \rho)$*.*

2.3 Primitive d'une série entière

Proposition 44 (Gourdon p238)**.** *Primitive d'une série entière et rayon de convergence.*

Application 45. *Calcul de* $ln(1 + x)$*,* $arctan(x)$*,* $arcsin(x)$*.*

2.4 Liens avec l'holomorphie

Définition 46 (OA p46). *[Pabion, Queffelec] Fonctions holomorphes, fonctions analytiques.*

Proposition 47 (OA p48). *La somme d'une série entière est holomorphe en tout point du disque ouvert de convergence. Valeur de la dérivée.*

Théorème 48 (OA p48). *f est C^∞ sur le disque ouvert de convergence.*

Théorème 49 (ZQ p45). *La somme d'une série entière est analytique dans le disque ouvert de convergence.*

Proposition 50 (Gourdon p239). *Principe des zéros isolés.*

Proposition 51 (Gourdon p239). *Formule de Cauchy.*

Application 52 (Gourdon p248). *Théorème de Liouville.*

Proposition 53 (Gourdon p240). *Egalité de Parseval.*

3 Applications

3.1 Calcul de séries numériques, dénombrement

Proposition 54 (FGN AN2). *On montre que $\sum(-1)^n/(2n+1) = \pi/4$ en montrant que la fonction $f(x) = \sum(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ est continue en 1 (et par ailleurs, on sait que $f(x) = arctan(x)$).*

Proposition 55 (FGN AL1). *[Bernis] Nombres de Bell. (Nombres de relations d'équivalence.)*

3.2 Développement en série entière via la résolution d'équations différentielles linéaires

Remarque 56 (Gourdon p242). *Pour trouver le développement en série entière d'une fonction. 1. Pour trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction. 2. On cherche des solutions de cette equa diff sous la forme de série entière,on obtient une récurrence sur les coeff que l'on résout, puis on vérifie réciproquement que le rayon de convergence de la série trouvée est bien strictement positif ce qui justifie tous les calculs a posteriori (analyse-synthèse) 3. On invoque Cauchy-Lipschtiz pour avoir l'unicité et en déduire que f est égale à la série entière*

Exemple 57 (Gourdon p245). $arcsin(\sqrt{x})/(\sqrt{x(1-x)})$.

Proposition 58 (FGN). *Equation de Bessel.*

Remarque 59. *Tout simplement pour résoudre des équations différentielles. On cherche des solutions particulières sous la forme de série entière (c'est plus facile !)*

3.3 Fonctions génératrices